

سوالات چهارگزینه ای

(بوشهر، ۱۴۰۱-۱۴۰۰)

۱ مجموعه $A = \{35^\circ, 925, \sqrt{3100}, 2725\}$ چند عضو دارد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

(فوزستان، ۱۴۰۱-۱۴۰۰)

۲ کدام یک از عبارات زیر یک مجموعه تهی است؟

- ۱ شمارنده های زوج عدد ۲۷ ۲ اعداد گویای بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ۳ اعداد گنگ بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ ۴ هر سه مورد

(آزمون تیزهوشان، ۱۴۰۲-۱۴۰۱)

۳ مقدار $n(\{n(A), n(B), n(C)\})$ برابر کدام عدد نمی تواند باشد؟

- ۱ یک ۲ دو ۳ سه ۴ صفر

درس دوم: مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها

دو مجموعه برابر

دو مجموعه A و B با هم برابرند، هرگاه هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد؛ در این صورت می نویسیم $A = B$.
اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که در A نباشد در این صورت دو مجموعه A و B با هم برابر نیستند و می نویسیم $A \neq B$.
مثال: دو مجموعه A و B با هم برابرند. x و y را تعیین کنید.
 $A = \{x+1, 3\}$, $B = \{y-1, 4\}$

پاسخ:

چون A و B با هم برابرند، طبق تعریف باید هر عضو A ، عضوی از B ، و هر عضو B عضوی از A باشد، بنابراین داریم:

$$x+1=4 \Rightarrow x=3$$

$$y-1=3 \Rightarrow y=4$$

زیرمجموعه:

هرگاه تمام اعضای مجموعه B عضو مجموعه A باشند، می گوییم B زیرمجموعه A است و به صورت $B \subseteq A$ نشان می دهیم.
اگر B دارای عضوی باشد که این عضو به مجموعه A تعلق نداشته باشد، می گوییم B زیرمجموعه A نیست و به صورت $B \not\subseteq A$ نشان می دهیم.

نکات

- اگر $A = B$ ، آنگاه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.
- مجموعه تهی، زیرمجموعه همه مجموعه هاست؛ یعنی برای هر مجموعه دلخواه A داریم: $\emptyset \subseteq A$.
- هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است؛ یعنی اگر A مجموعه ای دلخواه باشد، داریم: $A \subseteq A$.
- تعداد کل زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر با 2^n است.
- تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی به طوری که m عضو حتماً در آنها باشد و k عضو حتماً در آنها نباشد برابر با 2^{n-m-k} است.
- مجموعه n عضوی دارای n زیرمجموعه یک عضوی و $\frac{n(n-1)}{2}$ زیرمجموعه دو عضوی و $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ زیرمجموعه سه عضوی است.

نمایش مجموعه های اعداد

می دانیم مجموعه ها را می توان هم با اعضای آن و هم با نمودار ون نمایش داد. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه ها استفاده از نمادهای ریاضی است.
مثلاً مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را می توان به صورت $\{x \in \mathbb{N} | x \leq 4\}$ نمایش داد. (با عددهای طبیعی \mathbb{N} در سال های گذشته آشنا شده اید).
ارتباط بین اعضای مجموعه های اعداد طبیعی، حسابی، گویا، حقیقی و نمودار ون مربوط به این ارتباط به صورت زیر است:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

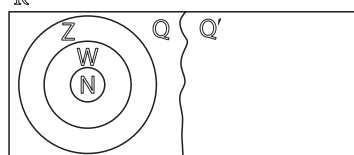
مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

مجموعه اعداد حقیقی: \mathbb{R}

مجموعه اعداد گنگ: \mathbb{Q}



تذکر: با اعداد حقیقی (\mathbb{R}) و اعداد گنگ (\mathbb{Q}') در فصل بعد آشنا خواهید شد.

سؤالات چهارگزینه‌ای

۴ اگر دو مجموعه $\{m-n, 15\}$ و $\{12, m+n\}$ با هم برابر باشند، مقدار $\frac{m}{n}$ برابر با کدام گزینه است؟

- ۱ $\frac{1}{9}$ ۲ ۹ ۳ $-\frac{1}{9}$ ۴ ۹ - (شهرستان‌های تهران، ۱۴۰۲-۱۴۰۱)

۵ نمایش عددی مجموعه $\{x-1 | x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ کدام گزینه است؟

- ۱ $\{0, 1, 2\}$ ۲ $\{1, 2, 3\}$ ۳ $\{0, 1\}$ ۴ $\{1, 2\}$ (چه‌ممال و بفتیاری، ۱۴۰۰-۱۴۰۱)

۶ مجموعه $\{2, 6, 12, 20, \dots\}$ به صورت نماد ریاضی کدام گزینه است؟

- ۱ $\{n^2+1 | n \in \mathbb{N}\}$ ۲ $\{n^2+2n | n \in \mathbb{N}\}$ ۳ $\{n(n+1) | n \in \mathbb{N}\}$ ۴ $\{n(n+1) | n \in \mathbb{Z}\}$ (زنیان، ۱۴۰۰-۱۴۰۱)

۷ کدام یک از مجموعه‌های زیر با بقیه مجموعه‌ها برابر نیست؟

- ۱ $\{-2n+1 | n \in \mathbb{Z}, -5 \leq n \leq -7\}$ ۲ $\{n | n \in \mathbb{N}, 11 \leq 2n+1 \leq 15\}$ ۳ ریشه دوم مثبت مربع‌های کامل بین ۲۵۶ و ۱۰۰ ۴ سه عدد فرد متوالی که حاصل جمع آنها ۳۹ است. (قزوین، ۱۴۰۱-۱۴۰۰)

۸ چندتا از عضوهای مجموعه $A = \{\frac{\sqrt{x}}{2} | x \in \mathbb{N}, x < 60\}$ عدد طبیعی است؟

- ۱ ۷ ۲ ۴ ۳ ۳ ۴ ۶ (یزد، ۱۴۰۲-۱۴۰۱)



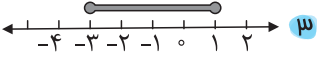
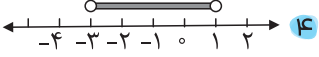
۹ مجموعه $A = \{a, \{a\}, \{a, a\}, \{a, a, a\}, \dots\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

- ۱ ۲ ۲ ۴ ۳ ۸ ۴ بی‌شمار (البرز و قزوین، ۱۴۰۱-۱۴۰۰)

۱۰ اگر داشته باشیم $\{5x-3, 2x+6\} = \{\sqrt{n}-1\}$ ؛ آنگاه حاصل $2n-8$ کدام است؟

- ۱ ۱۶۹ ۲ ۱۳ ۳ ۳۳۸ ۴ ۳۳۰ (البرز و قزوین، ۱۴۰۱-۱۴۰۰)

۱۱ نمودار مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 1\}$ کدام است؟

- ۱  ۲  ۳  ۴  (البرز و قزوین، ۱۴۰۱-۱۴۰۰)

۱۲ با توجه به مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Q} | -1 < x < 1\}$ کدام گزینه درست است؟

- ۱ $\sqrt{0/16} \notin A$ ۲ از نمایش اعضای A روی محور، یک پاره‌خط به وجود می‌آید. ۳ $A \cup Q' = \mathbb{R}$ ۴ صفر تنها عدد حسابی در مجموعه A است. (فوزستان، ۱۴۰۱-۱۴۰۰)

۱۳ اگر مجموعه‌های $A = \{4, a, \sqrt{b}\}$ و $B = \{|a|, -4\}$ با هم مساوی باشند، حاصل $b-a$ کدام گزینه است؟

- ۱ صفر ۲ ۲۰ ۳ ۸ ۴ ۱۲ (سمنان، ۱۴۰۱-۱۴۰۰)

۱۴ مجموعه $A = \{\frac{2^k}{k^2} | k \in \mathbb{N}, k \leq 6\}$ چند عضو دارد؟

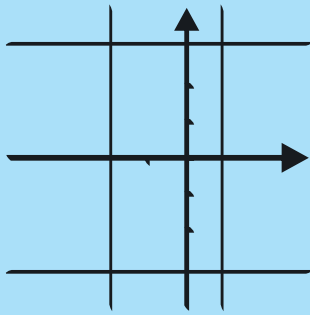
- ۱ ۲ ۲ ۵ ۳ ۶ ۴ بی‌شمار (قم، ۱۴۰۱-۱۴۰۰)

۱۵ با فرض $2 \notin A$ ، $1 \in A$ و $n(A) = 3$ ، مجموعه A کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

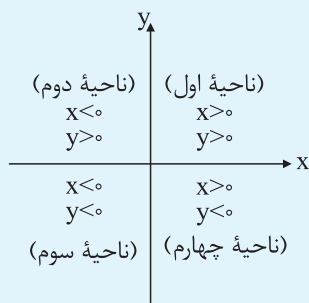
- ۱ $\{1, 1, 3\}$ ۲ $\{1, 2, 3\}$ ۳ $\{1, 20, 5\}$ ۴ $\{1, 3, 4, 5\}$ (گلستان، ۱۴۰۱-۱۴۰۰)

فصل ششم

خط و معادله‌های خطی



درس اول: معادله خط



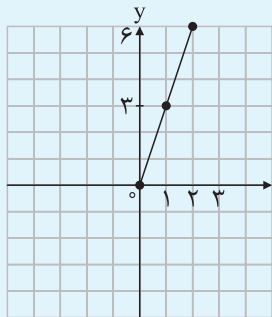
پنظوری: برای تعیین موقعیت یک نقطه (مختصات نقطه) در صفحه از دو محور عمودی و افقی استفاده می‌کنیم که به آنها دستگاه مختصات گفته می‌شود. مختصات یک نقطه دارای دو مؤلفه x (طول) و y (عرض) است.

رابطه خطی:

هرگاه بین دو متغیر مانند x و y رابطه‌ای وجود داشته باشد، به طوری که نقاط حاصل از این رابطه روی صفحه مختصات یک خط راست تشکیل دهند، به آن رابطه یک رابطه خطی می‌گوییم. به عبارت دیگر رابطه خطی در صفحه، یک تساوی جبری است که در آن یک یا دو متغیر با توان یک وجود دارد و متغیرها در هم ضرب یا بر هم تقسیم نشده‌اند. به عنوان مثال $2x + 4y = 10$ ، $3x = 6$ و $y = 8$ همگی روابط خطی هستند.

مثال: موتورسیکلتی با سرعت ۳ متر بر ثانیه در حال حرکت است. رابطه بین مسافت طی شده و مدت زمان حرکت توسط این موتورسیکلت را بررسی کنید.

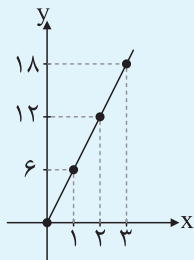
| | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|-----|
| زمان (t) | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ... |
| مسافت (x) | ۰ | ۳ | ۶ | ۹ | ... |



پاسخ: با توجه به جدول چون سرعت این موتورسیکلت ۳ متر بر ثانیه است، در زمان صفر مسافتی طی نشده است. بعد از یک ثانیه ۳ متر، بعد از ۲ ثانیه ۶ متر و... طی شده است. همان طور که مشاهده می‌کنید عدد مربوط به مسافت طی شده در یک مدت زمان خاص، برابر است با سه برابر عدد مربوط به زمان طی شده. این نقاط را روی صفحه مختصات رسم می‌کنیم. می‌بینیم که نقاط فوق تشکیل یک خط راست می‌دهند.

$x = 3t \rightarrow$ زمان
 \downarrow
 مسافت طی شده

مثال: آیا رابطه بین طول شعاع یک دایره و محیط آن یک رابطه خطی است؟ (π را ۳ در نظر بگیرید).



$$y = 2\pi x - \pi = 3 \rightarrow y = 6x$$

پاسخ: اگر شعاع دایره را x و محیط آن را y در نظر بگیریم، داریم:

| | | | | | |
|----------------|---|---|----|----|-----|
| شعاع دایره (x) | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ... |
| محیط دایره (y) | ۰ | ۶ | ۱۲ | ۱۸ | ... |

اگر نقاط به دست آمده را روی صفحه مختصات رسم کنیم، خواهیم دید که تشکیل یک خط راست می‌دهند؛ بنابراین رابطه بین شعاع دایره و محیط آن یک رابطه خطی است.

توجه کنید که رابطه $y = 2\pi x$ دارای دو متغیر با توان یک است و این دو متغیر در هم ضرب یا بر هم تقسیم نشده‌اند. بنابراین با توجه به این نکته بدون رسم شکل نیز می‌توان گفت که رابطه داده شده، خطی است.



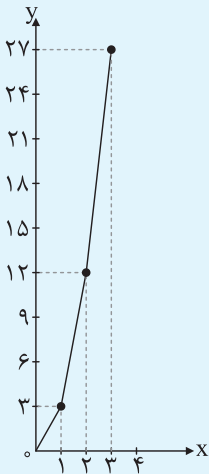


مثال: آیا رابطه بین طول شعاع یک دایره و مساحت آن یک رابطه خطی است؟ ($\pi=3$)

پاسخ: اگر شعاع دایره را x و مساحت آن را y در نظر بگیریم، داریم:

$$y = \pi x^2 \xrightarrow{\pi=3} y = 3x^2$$

در این رابطه یک متغیر با توان ۲ وجود دارد، پس این رابطه قطعاً خطی نیست. برای درک بهتر این مطلب آن را رسم می‌کنیم: نقاط به دست آمده روی صفحه مختصات تشکیل یک خط راست نمی‌دهند، بنابراین رابطه بین شعاع دایره و مساحت آن یک رابطه غیرخطی است.



معادله خط

معادله یک خط راست رابطه ریاضی بین طول و عرض نقاط تشکیل دهنده آن خط است. فرم کلی (استاندارد) معادله خط به صورت $y = ax + b$ است. (a و b اعدادی ثابت هستند).

رسم نمودار خط

برای رسم نمودار یک خط کافی است دو نقطه از آن را داشته باشیم، بنابراین به جای متغیر x مقادیر دلخواه مانند ۰، ۱، ۲ و... را قرار می‌دهیم و بر اساس آن مقادیر y را به دست می‌آوریم. سپس نقاط را روی صفحه مختصات رسم کرده و به هم وصل می‌کنیم.

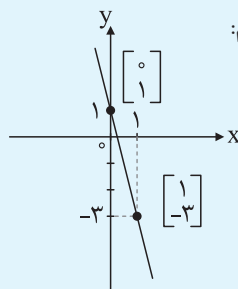
نکات

- اگر ضریب x در یک معادله خط عددی صحیح (مثبت یا منفی) باشد، بهتر است به جای x اعداد صفر و یک را قرار دهیم و مقادیر y را بر اساس آن به دست آوریم و اگر ضریب x عددی کسری باشد بهتر است اعداد صفر و مخرج کسر به جای x قرار گیرد.
- اگر در یک معادله خط به جای x عدد صفر قرار دهیم، مختصات نقطه برخورد خط با محور عرض‌ها و اگر به جای y صفر قرار دهیم، مختصات نقطه برخورد خط با محور طول‌ها به دست می‌آید.

مثال: نمودار خط به معادله $y = -4x + 1$ را رسم کنید.

پاسخ: چون ضریب x عددی صحیح است، به جای x اعداد صفر و یک را قرار می‌دهیم:

| | | |
|--|--|---|
| x | ۰ | ۱ |
| y | ۱ | -۳ |
| $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ |



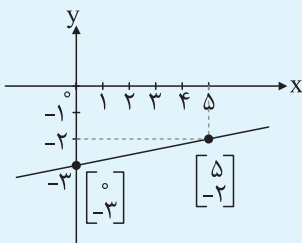
مثال: نمودار خط به معادله $5y - x + 15 = 0$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا معادله را به صورت فرم کلی معادله خط می‌نویسیم:

$$5y - x + 15 = 0 \Rightarrow 5y = x - 15 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x - 3$$

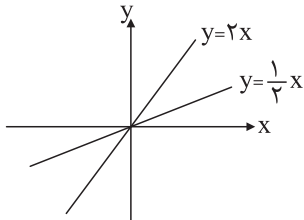
ضریب x یک عدد کسری است، بنابراین به جای x اعداد صفر و ۵ را قرار می‌دهیم:

| | | |
|--|---|---|
| x | ۰ | ۵ |
| y | -۳ | -۲ |
| $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ |

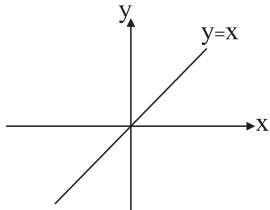


نکات

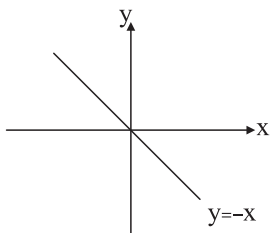
۱) فرم کلی معادله خطهایی که از مرکز مختصات می‌گذرند، به صورت $y = ax$ است.



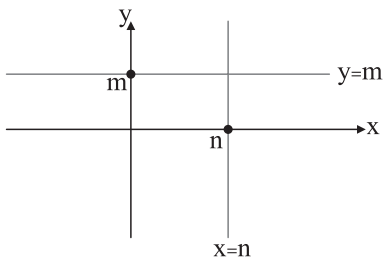
۲) فرم کلی معادله نیمساز ربع اول و سوم به صورت $y = x$ است.



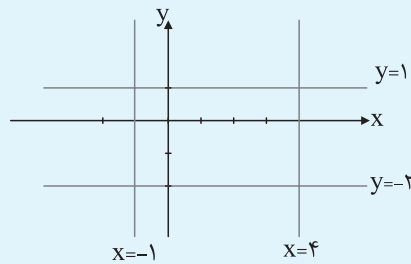
۳) فرم کلی معادله نیمساز ربع دوم و چهارم به صورت $y = -x$ است.



۴) فرم کلی معادله خطهایی که موازی محور طول‌ها (x ها) هستند به صورت $y = m$ (m عددی ثابت) است. همچنین فرم کلی معادله خطهایی که موازی محور عرض‌ها (y ها) هستند به صورت $x = n$ (n عددی ثابت) است.



مثال: خطوط $y = -2$ و $y = 1$ ، $x = -1$ ، $x = 4$ را رسم نموده و مساحت شکل ایجادشده را به دست آورید.



پاسخ: ناحیه ایجادشده یک مستطیل به طول ۵ و عرض ۳ واحد است.

واحد مربع $= ۱۵ = ۵ \times ۳ =$ عرض \times طول = مساحت مستطیل

نکات

برای آنکه بدانیم آیا نقطه‌ای روی یک خط قرار دارد یا خیر، کافی است مختصات نقطه مورد نظر را به جای x و y در معادله خط قرار دهیم. اگر مختصات نقطه در آن خط صدق کرد پس آن نقطه روی خط قرار دارد.

پاسخنامه





پاسخنامه فصل اول: مجموعه‌ها

۱ گزینه ۲

نکته

۱) $(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$

۲) $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$A = \{35^\circ, 925, \sqrt{3100}, 2725\}$
 $= \{35^\circ, (3^2)^{25}, \sqrt{35^\circ \times 35^\circ}, (3^3)^{25}\} = \{35^\circ, 3^5, 35^\circ, 3^{75}\} \Rightarrow n(A) = 2$

۲ گزینه ۱

نکته

شمارنده‌های (مقسوم‌علیه‌های) یک عدد، اعدادی هستند که عدد مورد نظر بر آنها بخش پذیر است.

پرسشی گزینه‌ها

گزینه «۱»:

$\{1, 3, 9, 27\}$: شمارنده‌های عدد ۲۷

همان طور که می‌بینیم هیچ شمارنده زوجی وجود ندارد.

گزینه «۲»:

$\sqrt{2} = 1/4142... , \sqrt{3} = 1/732... \Rightarrow \sqrt{2} < 1/5 = 1/5 < \sqrt{3}$

تهی نیست.

گزینه «۳»: بین دو عدد گویا بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

گزینه «۴»: به‌طور قطع اشتباه است.

۳ گزینه ۱۶

برای این سؤال، سه حالت در نظر می‌گیریم:

(۱) هر سه مجموعه A، B و C دارای تعداد اعضای برابر باشند:

$n(A) = n(B) = n(C) \Rightarrow n\{n(A), n(B), n(C)\} = 1$

(۲) دو مجموعه دارای تعداد اعضای برابر و تعداد اعضای مجموعه دیگر با آنها متمایز باشند که در این صورت $\{n(A), n(B), n(C)\}$ دارای دو عضو متمایز است. بنابراین: $n\{n(A), n(B), n(C)\} = 2$

(۳) اگر تعداد اعضای هر سه مجموعه A، B و C با هم متفاوت باشد:

$n\{n(A), n(B), n(C)\} = 3$

۴ گزینه ۲

برای اینکه دو مجموعه داده‌شده برابر باشند باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$\begin{cases} m-n=12 & (1) \\ m+n=15 & (2) \end{cases}$

با جمع کردن دو طرف تساوی معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$m-n+m+n=12+15 \Rightarrow 2m=27 \Rightarrow m=\frac{27}{2}$

$\xrightarrow{(1)} \frac{27}{2}-n=12 \Rightarrow n=\frac{3}{2}$

$\frac{m}{n} = \frac{\frac{27}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{27}{3} = 9$

۵ گزینه ۱

نکته

در نمایش مجموعه با استفاده از نمادهای ریاضی، ابتدا به قسمت شرطها دقت می‌کنیم. به‌عنوان مثال:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -1 < x < 4\}$
 (شرطها) (مانیتور یا خروجی)

از قسمت شرطها، اعدادی را که می‌توان از آنها استفاده کرد، استخراج می‌کنیم و برای یافتن پاسخ نهایی در قسمت مانیتور قرار می‌دهیم.

$A = \{2(1)-1, 2(2)-1, 2(3)-1\} = \{1, 3, 5\}$

$\{x-1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\} = \{0, 1, 2\}$
 ۱, ۲, ۳

۶ گزینه ۳

$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ \downarrow \\ 1 \times 2 \end{matrix} , \begin{matrix} 6 \\ \downarrow \\ 2 \times 3 \end{matrix} , \begin{matrix} 12 \\ \downarrow \\ 3 \times 4 \end{matrix} , 20, \dots \right\} = \{n(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

۷ پرسشی گزینه‌ها

گزینه «۱»: توجه کنید در صورت سؤال، $-7 \leq n \leq -5$ درست است.

$\{-2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}, -7 \leq n \leq -5\} = \{-2n+1 \mid n \in \{-7, -6, -5\}\}$

$= \{-2(-7)+1, -2(-6)+1, -2(-5)+1\} = \{11, 13, 15\}$

گزینه «۲»:

$\{n \mid n \in \mathbb{N}, 11 \leq 2n+1 \leq 15\} = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq 2n \leq 14\}$

$= \{n \mid n \in \mathbb{N}, 5 \leq n \leq 7\} = \{5, 6, 7\}$

گزینه «۳»: ریشه‌های دوم مثبت مربع‌های کامل بین ۱۰۰ و ۲۵۶ عبارت‌اند از:

$\{\sqrt{121}, \sqrt{144}, \sqrt{169}, \sqrt{196}, \sqrt{225}\} = \{11, 12, 13, 14, 15\}$

گزینه «۴»: برای به دست آوردن سه عدد فرد متوالی که حاصل جمع آنها ۳۹ شود کافی است عدد کوچک‌تر را x و دو عدد دیگر بعد از آن را به ترتیب x+2 و x+4 در نظر بگیریم.

$x+(x+2)+(x+4)=39 \Rightarrow 3x+6=39 \Rightarrow 3x=33 \Rightarrow x=11$

بنابراین سه عدد فرد متوالی عضو مجموعه $\{11, 13, 15\}$ هستند.

با توجه به مجموعه‌های به‌دست‌آمده فقط مجموعه‌های دو گزینه «۱» و «۴» با هم برابرند.

۸ گزینه ۳

برای آنکه $\frac{\sqrt{x}}{p}$ به‌ازای x‌های طبیعی کمتر از ۶۰، عدد طبیعی باشد:

(۱) x باید مربع کامل باشد (تا از رادیکال خارج شود).

(۲) \sqrt{x} باید مضرب ۲ باشد.

از بین اعداد مربع کامل ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶ و ۴۹ که کمتر از ۶۰ هستند تنها اعداد ۴، ۱۶ و ۳۶ قابل قبول هستند، چون:

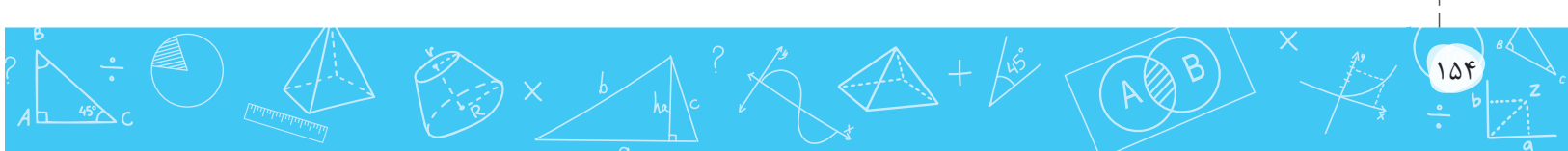
$x=4 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{p} = \frac{\sqrt{4}}{p} = 1 \in \mathbb{N}$

$x=16 \Rightarrow \frac{\sqrt{16}}{p} = \frac{4}{p} = 2 \in \mathbb{N}$

$x=36 \Rightarrow \frac{\sqrt{36}}{p} = \frac{6}{p} = 3 \in \mathbb{N}$

بنابراین از بین ۵۹ عضو مجموعه $\{\frac{\sqrt{1}}{p}, \frac{\sqrt{2}}{p}, \dots, \frac{\sqrt{59}}{p}\}$ ، سه عضو

$\{\frac{\sqrt{4}}{p}, \frac{\sqrt{16}}{p}, \frac{\sqrt{36}}{p}\}$ عدد طبیعی هستند.





جمله «ج»: نادرست است.

جمله «د»: نادرست است؛ زیرا در دوزنقه نیز زاویه‌های مجاور به دو ضلع موازی با هم مکمل هستند اما دوزنقه، متوازی‌الاضلاع نیست.

۲۶۲ **گزینه پ** مثلث با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ یک مثلث قائم‌الزاویه است

چراکه رابطه فیثاغورس در آن برقرار است.

$$13^2 = 12^2 + 5^2 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث اولی} = 5 + 12 + 13 = 30$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث اولی} = \frac{5 \times 12}{2} = 30$$

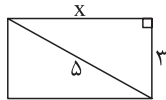
$$\Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{\text{محیط مثلث اولی}}{\text{محیط مثلث دومی}} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$$

بنابراین چون نسبت تشابه برابر $\frac{5}{8}$ شد، نسبت مساحت دو مثلث برابر $(\frac{5}{8})^2$ یعنی $\frac{25}{64}$ می‌شود. داریم:

$$\frac{\text{مساحت مثلث اولی}}{\text{مساحت مثلث دومی}} = \frac{25}{64} \Rightarrow \frac{30}{\text{مساحت مثلث دومی}} = \frac{25}{64}$$

$$\text{مساحت مثلث دومی} = \frac{30 \times 64}{25} = \frac{192 \times 4}{25 \times 4} = \frac{768}{100} = 76.8$$

۲۶۳ **گزینه د** ابتدا ضلع دیگر مستطیل دوم را با رابطه فیثاغورس به دست می‌آوریم:



$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 25 = 9 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = 4$$

بنابراین مساحت مستطیل دوم $3 \times 4 = 12$ است. مساحت مستطیل اول ۲۴ بود.

پس نسبت مساحت‌های دو مستطیل برابر $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ است. بنابراین نسبت اضلاع و قطرهای دو مستطیل، $\sqrt{2}$ است.

$$\frac{\text{قطر مستطیل اولی}}{\text{قطر مستطیل دومی}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\text{قطر مستطیل اولی}}{5} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{قطر مستطیل اولی} = 5\sqrt{2}$$

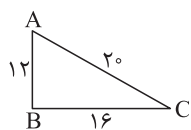
۲۶۴ **گزینه ب** با استفاده از اطلاعات مسئله و تشابه دو مثلث می‌توانیم

نسبت تشابه را پیدا کنیم.

$$\text{محیط مثلث اول} = 12 + 20 + 16 = 48$$

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{\text{محیط مثلث اول}}{\text{محیط مثلث دوم}} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$$

رابطه فیثاغورس در مثلث اول صدق می‌کند و یک مثلث قائم‌الزاویه است، زیرا:



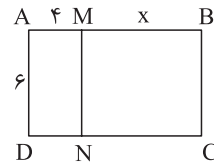
$$20^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow 400 = 144 + 256$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{12 \times 16}{2} = 96$$

می‌دانیم نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است. بنابراین:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{96}{x} \Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{96}{x} \Rightarrow x = \frac{96 \times 9}{16} = 54$$

۲۵۷ **گزینه پ** از تشابه دو مستطیل خواهیم داشت:



$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AM} \Rightarrow \frac{6}{4+x} = \frac{6}{4} \Rightarrow 4(4+x) = 6 \times 6$$

$$\Rightarrow 16 + 4x = 36 \Rightarrow 4x = 36 - 16 = 20 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{مساحت مستطیل ABCD} = (4+5) \times 6 = 54$$

۲۵۸ **گزینه پ** به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

عبارت اول: نادرست است. فرض کنید دو مربع به اندازه ضلع‌های ۴ و ۵ داشته باشیم، این دو مربع‌ها با هم متشابه‌اند اما هم‌نهشت نیستند.

عبارت دوم: درست است.

عبارت سوم: درست است.

بنابراین دو عبارت درست داریم.

۲۵۹ **گزینه ب** باید حواسمان باشد اضلاع متناسب را با توجه به

زاویه‌های برابر پیدا کنیم.

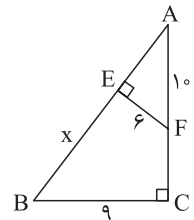
$$\begin{aligned} \Delta ACB &\approx \Delta AEF \\ \hat{A} &= \hat{A} \text{ مشترک} \\ \hat{C} &= \hat{E} = 90^\circ \\ \hat{B} &= \hat{F} \end{aligned} \Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE}$$

$$\Delta AEF: AF^2 = EF^2 + AE^2$$

$$\Rightarrow 10^2 = 6^2 + AE^2 \Rightarrow AE^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AE = 8$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{9}{6} = \frac{8+x}{10} \Rightarrow 90 = 48 + 6x$$

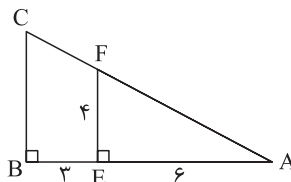
$$\Rightarrow 6x = 90 - 48 = 42 \Rightarrow x = 7$$



۲۶۰ **گزینه پ**

چون در این دو مثلث داریم:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A} \text{ مشترک} \\ \hat{B} &= \hat{E} = 90^\circ \end{aligned}$$



می‌توان نتیجه گرفت که اضلاع مقابل این زاویه‌ها با هم متناسب خواهند بود.

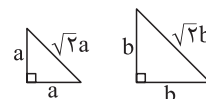
$$\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{4}{BC}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{36}{6} = 6$$

۲۶۱ **گزینه د** بررسی جمله‌ها:

جمله «الف»: نادرست است.

جمله «ب»: درست است؛ دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین دلخواه زیر را در نظر بگیرید. نسبت اضلاع با هم برابر است و زاویه‌ها نیز مساوی‌اند، بنابراین با هم متشابه‌اند.



عبارت سوم: درست است؛ یکی از ویژگی های لوزی، عمود منصف بودن قطرها است. عبارت چهارم: نادرست است؛ برای مثال نقض دو مربع یکی با اندازه ضلع ۴ و دیگری با اندازه ضلع ۳ را می توان آورد که با هم متشابه اند اما هم نهشت نیستند. عبارت پنجم: درست است.

۲۶۹ **توجه** از تشابه دو مستطیل ABCD و EADF خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = \frac{AB^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2AD^2 = AB^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{AD^2} = 2 \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{EF}{DC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۲۷۰ **توجه** صورت سؤال ناقص است. باید گفته شود که دو مثلث قائم الزاویه ABC و MNP با هم متشابه اند.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

محیط مثلث ABC: $6 + 8 + 10 = 24$

نسبت تشابه $\frac{1}{4}$ است که با نسبت محیطها برابر است. بنابراین دو حالت می تواند اتفاق بیفتد:

(۱) مثلث ABC بزرگتر از مثلث MNP باشد:

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 12$$

(۲) مثلث MNP بزرگتر از مثلث ABC باشد:

$$\frac{1}{4} = \frac{24}{x} \Rightarrow x = 48$$

۲۷۱ **توجه**

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{8} = \frac{2}{AD}$$

$$\Rightarrow AD^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow AD = 4$$

محیط مستطیل EBCF برابر است با:

$$(4 + 6) \times 2 = 20$$

۲۷۲ **توجه** اگر مثلث ABC و مثلث A'B'C' متشابه باشند و نسبت تشابه آنها $\frac{3}{5}$ باشد، بنابراین:

$$\frac{6}{A'B'} = \frac{9}{A'C'} = \frac{12}{B'C'} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{6}{A'B'} = \frac{3}{5} \Rightarrow A'B' = 10$$

$$\frac{9}{A'C'} = \frac{3}{5} \Rightarrow A'C' = 15$$

$$\frac{12}{B'C'} = \frac{3}{5} \Rightarrow B'C' = 20$$

۲۷۳ **توجه** به بررسی عبارت ها می پردازیم:

عبارت «الف»: نادرست است. زیرا محل برخورد ارتفاعها در مثلث با یک زاویه باز، خارج مثلث و در مثلث قائم الزاویه روی رأس مقابل به وتر است.

عبارت «ب»: نادرست است. فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه یکسان است.

عبارت «ج»: نادرست است. مثال نقض:



عبارت «د»: در مثلث متساوی الساقین فقط میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند پس این عبارت نادرست است.

عبارت «ه»: دو شکل هم نهشت حتماً متشابه اند. پس این عبارت درست است. بنابراین چهار جمله نادرست است.

۲۶۵ **توجه** نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث AED و ABC را با توجه به متناسب بودن ضلع های روبه زاویه های برابر، می نویسیم:

توجه: چون E وسط AB است؛ پس $AB = 2 \times 1/5 = 3$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{5}{1/5} = \frac{3}{AD} \Rightarrow AD = \frac{3 \times 1/5}{5} = 0/9$$

$$\Rightarrow DC = AC - AD = 5 - 0/9 = 4/1$$

۲۶۶ **توجه** از تشابه دو مثلث می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{y}{x} = \frac{14}{x+2} \Rightarrow y(x+2) = 14x \Rightarrow yx + 2y = 14x \Rightarrow yx - 14x = -2y$$

$$\Rightarrow yx = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{y} = 2$$

نسبت مساحتها $= \frac{y^2}{4} \Rightarrow$ نسبت تشابه $= \frac{y}{2}$

۲۶۷ **توجه**

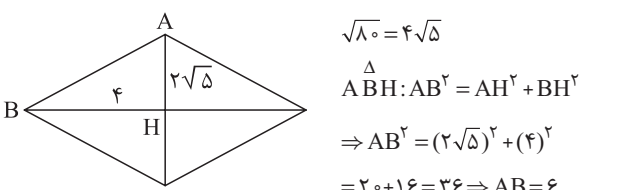
(۱) $\frac{y}{5} = \frac{4}{25} \Rightarrow$ نسبت مساحتها $= \frac{y^2}{25} \Rightarrow$ نسبت تشابه $= \frac{y}{5}$

(۲) مساحت لوزی کوچک $= \frac{4 \times \sqrt{80}}{2} = 4\sqrt{80} = 4 \times 4\sqrt{5} = 16\sqrt{5}$

مساحت لوزی بزرگ برابر است با:

$$(2), (1) \Rightarrow \frac{16\sqrt{5}}{x} = \frac{4}{25} \Rightarrow 4x = 25 \times 16\sqrt{5} \Rightarrow x = 100\sqrt{5}$$

در لوزی کوچک، می دانیم:



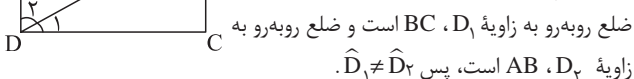
با استفاده از تشابه دو لوزی و اندازه ضلع لوزی کوچک خواهیم داشت:

اندازه ضلع لوزی بزرگ: $\frac{2}{5} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 15$

محیط لوزی بزرگ: $15 \times 4 = 60 \Rightarrow$ $\frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}} = \frac{60}{100\sqrt{5}} = \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{25}$

۲۶۸ **توجه** به بررسی عبارت ها می پردازیم:

عبارت اول: نادرست است؛ زیرا مثال نقض وجود دارد. به عنوان مثال در مستطیلی به طول ۶ و عرض ۳ خواهیم داشت:



عبارت دوم: نادرست است؛ به دو مثلث زیر نگاه کنید. هر چند یکی از زوایای این دو مثلث متساوی الساقین با هم برابر است، ولی متشابه نیستند.

